

総合問題

1. ※ 問題文は、教科書 201 ページを参照

指針 まず、何を x とするかであるが、ここでは当選に必要な最低得票数を x 票とする。このとき、(すべての投票数) $-4x$ は、落選した立候補者全員の得票数であるから、もしもこの票すべてが落選した立候補者 1 人の得票数としたとき、この得票数と x との間にどのような関係が成り立つかを考える。

解答 当選に必要な、1 人の立候補者の最低得票数を x 票とする。

投票率が 50 % であるから、投票数は $100000 \times \frac{50}{100} = 50000$ (票)

ここで、当選した立候補者全員がこの最低得票数で当選したと仮定する。

このとき、残りの $(50000 - 4x)$ 票がすべて落選した立候補者のうちの 1 人だけに投票されていたとすると、この $(50000 - 4x)$ 票は x 票より少ないから

$$50000 - 4x < x$$

これを解くと $x > 10000$

よって、開票率 40 % の時点での開票数は $50000 \times 0.4 = 20000$ (票) であり、そのうち立候補者 A の得票数は 10001 票以上であったと考えられる。

答 10001 票以上

2. ※ 問題文は、教科書 201 ページを参照

指針 (1) (i) $x \in X$ ならば $x \in Y$ が成り立つ $\Leftrightarrow X \subset Y$,
 $X \subset Y \Leftrightarrow \overline{X} \supset \overline{Y}$ を利用。

(ii), (iv) (イ) から $C \cap E \neq \emptyset$ であることに着目。

(2) ① は (1) の (i) から。② は条件 (イ), (ウ) から。③~⑤ は条件 (ウ) から。

解答 (1) (i) $x \in D$ とすると条件 (ウ) より $x \in B$ である。すなわち $D \subset B$
 また、条件 (ア) より、 $\overline{A} \subset \overline{B}$ であるから $B \subset A$

ゆえに、 $D \subset A$ が成り立つから、 $x \in D$ ならば $x \in A$ は成り立つ。

よって、(i) は正しい。

(ii) 条件 (イ) から $C \cap E \neq \emptyset$ であるから、 $x \in C \cap E$ とすると、条件 (イ) より $x \in B$

よって、(ii) は正しくない。

(iii) (ア)~(イ) の 4 つの条件からは判断できない。

(iv) 条件 (イ) から $C \cap E \neq \emptyset$ であるから、 $x \in C \cap E$ とすると、 x は E の要素である。このとき、条件 (イ) より $x \in B$

条件 (ウ) より、 $D \subset B$ であるから $x \in D$

よって、 $x \in D$ を満たすような E の要素 x があるから、(iv) は正しい。

以上から、必ず正しいと言えるものは (i), (iv) 答

(2) U の要素 x に関する条件 p について、

$x \in D \Rightarrow p$ が真であれば、条件 p は $x \in D$ であるための必要条件である。

① (1) より、 $D \subset A$ であるから、 $x \in D \Rightarrow x \in A$ は真である。

② $x \in D$ とすると、条件 (v) より $x \in B$ である。

このとき、条件 (i) より $x \in C$ である。

したがって、 $x \in D \Rightarrow x \in C$ は偽である。

③ 条件 (v) より、 $D \subset E$ であるから、 $x \in D \Rightarrow x \in E$ は真である。

④ 条件 (v) より、 $D \subset B$ であるから、 $x \in D \Rightarrow x \in B$ は偽である。

⑤ 条件 (v) より、 $D \subset E$ であるから、 $x \in D \Rightarrow x \in E$ は偽である。

以上より、 $x \in D$ であるための必要条件は ①, ③ 答

3. ※ 問題文は、教科書 202 ページを参照

指針 (3) (A), (B) が起こりうるグラフの状態を調べる。

(A) 方程式 $f(x)=0$ が重解をもつ $\Leftrightarrow$ 関数 $f(x)$ のグラフが x 軸に接する

(B) 不等式 $f(x)<0$ の解がすべての実数である $\Leftrightarrow$ 関数 $f(x)$ のグラフが x 軸より下側にある

解答 (1) グラフは下に凸の放物線であるから $a>0$

放物線の頂点は第 2 象限にあるから $p<0, q>0$

よって a : 正, p : 負, q : 正 答

(2) p, q の値を変えないから、放物線の頂点の位置は変化しない。

a の値を変化させると、放物線の開き具合が変化する。

よって (ア) 答

(3) (A) 「方程式 $f(x)=0$ が重解をもつ」…… (*1) とする。

(*1) が起こるのは、関数 $f(x)$ のグラフが x 軸に接するときである。

操作 ① を行う場合、放物線を自由に平行移動させることができるから、

(*1) は起こりうる。

操作 ② を行う場合、放物線の頂点の y 座標を自由に移動させることができるから、(*1) は起こりうる。

操作 ③ を行う場合、放物線の頂点の y 座標を動かすことができないから、(*1) は起こりえない。

よって、求める操作は ①, ② 答

(B) 「不等式 $f(x)<0$ の解がすべての実数である」…… (*2) とする。

(*2) が起こるのは、関数 $f(x)$ のグラフが x 軸より下側にあるときである。

操作 ① を行う場合、放物線の開き具合を変えることができないから、放物線は常に下に凸である。

よって、(*2) は起こりえない。

操作②を行う場合、放物線の開き具合を変えることができるから、放物線を上に凸の状態にできる。また、頂点の y 座標を自由に移動させることができるから頂点の位置を x 軸より下側に移動できる。

よって、(*2) は起こりうる。

操作③を行う場合、放物線の頂点の y 座標を動かすことができないから、(*2) は起こりえない。

よって、求める操作は ② 答

4. ※ 問題文は、教科書 203 ページを参照

指針 (7) $AC=y$ についても BD と同じように考える
とは、 $\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ に余弦定理を適用するということである。

解答 (1) $x^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta$ …… ① 答

(2) 180° 答

(3) $x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(180^\circ - \theta)$ …… ② 答

(4) $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ 答

(5) ① $\times bc +$ ② $\times ad$ から

$$(ad + bc)x^2 = (a^2 + d^2)bc + (b^2 + c^2)ad$$

よって $(ad + bc)x^2 = (ab + cd)(ac + bd)$ …… ③ 答 $ac + bd$

(6) ③ に $a=4, b=5, c=7, d=10$ を代入すると

$$(4 \cdot 10 + 5 \cdot 7)x^2 = (4 \cdot 5 + 7 \cdot 10)(4 \cdot 7 + 5 \cdot 10)$$

よって $75x^2 = 90 \cdot 78$

$$\text{すなわち } x^2 = \frac{90 \cdot 78}{75} = \frac{6^2 \cdot 13}{5}$$

$$\text{したがって } BD = x = \sqrt{\frac{6^2 \cdot 13}{5}} = \frac{6\sqrt{65}}{5} \quad \text{答}$$

(7) 四角形の辺と対角線の位置関係を考慮すると、③において

$$a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow d, d \rightarrow a$$

とおき換えればよい。

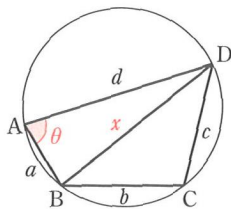
$$\text{よって } (ba + cd)y^2 = (bc + da)(bd + ca)$$

すなわち $(ab + cd)y^2 = (ad + bc)(ac + bd)$ …… ④ 答 $ac + bd$

(8) ③ $\times$ ④ から $(ab + cd)(ad + bc)x^2y^2 = (ab + cd)(ad + bc)(ac + bd)^2$

両辺を $(ab + cd)(ad + bc)$ で割ると $x^2y^2 = (ac + bd)^2$

$xy > 0, ac + bd > 0$ であるから $xy = ac + bd$ 答



5. ※ 問題文は、教科書 204 ページを参照

指針 (4) 表の G 列の 9, 10 から、 $r=r'$ が成り立つことが予想できる。

解答 (1) (x, y) のデータは

$(1, 1), (2, 3),$

$(3, 2), (2, 2)$

であり、散布図は右の図の

ようになる。 答

$(2x, 3y)$ のデータは

$(2, 3), (4, 9),$

$(6, 6), (4, 6)$

であり、散布図は右下の図

のようになる。 答

(2) (ア) $(2x)$ の標準偏差

$$2x \text{ の平均値は } \frac{1}{4}(2+4+6+4)=4$$

よって、 $2x$ の分散は

$$\frac{1}{4}\{(2-4)^2+(4-4)^2+(6-4)^2+(4-4)^2\}=2$$

したがって、 $2x$ の標準偏差は $\sqrt{2}=1.4142$ 答

(イ) $(2x$ と $3y$ の共分散)

$$3y \text{ の平均値は } \frac{1}{4}(3+9+6+6)=6$$

よって、 $2x$ と $3y$ の共分散は

$$\frac{1}{4}\{(2-4)(3-6)+(4-4)(9-6)+(6-4)(6-6)+(4-4)(6-6)\}=\frac{3}{2}=1.5$$

答

(3) 表の G 列の値と (2) の結果から $S_{2x}=2S_x, S_{3y}=3S_y, S_{(2x)(3y)}=6S_{xy}$ 答

(4) 表の G9, G10 より、 x と y の相関係数と、 $2x$ と $3y$ の相関係数は等しいことがわかる。よって、 $r=r'$ であることが予想される。 答

x の平均値を $\bar{x}$, y の平均値を $\bar{y}$ とする。

$$ax \text{ の平均値は } \frac{1}{4}(ax_1+ax_2+ax_3+ax_4)=a \cdot \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)=a\bar{x}$$

$$ax \text{ の分散は } \frac{1}{4}\{(ax_1-a\bar{x})^2+(ax_2-a\bar{x})^2+(ax_3-a\bar{x})^2+(ax_4-a\bar{x})^2\}$$

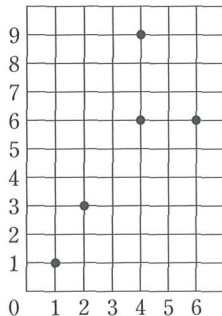
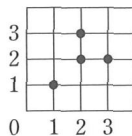
$$=\frac{1}{4}\{a^2(x_1-\bar{x})^2+a^2(x_2-\bar{x})^2+a^2(x_3-\bar{x})^2+a^2(x_4-\bar{x})^2\}$$

$$=a^2 \cdot \frac{1}{4}\{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+(x_4-\bar{x})^2\}$$

$$=a^2 s_x^2$$

$$ax \text{ の標準偏差は } \sqrt{a^2 s_x^2}=\sqrt{a^2} \sqrt{s_x^2}=a s_x \quad (a>0 \text{ より})$$

同様にして、 cy の標準偏差は $c s_y$ ($c>0$ より)



また, ax と cy の共分散は

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \{ (ax_1 - a\bar{x})(cy_1 - c\bar{y}) + (ax_2 - a\bar{x})(cy_2 - c\bar{y}) \\
 & \quad + (ax_3 - a\bar{x})(cy_3 - c\bar{y}) + (ax_4 - a\bar{x})(cy_4 - c\bar{y}) \} \\
 &= \frac{1}{4} \{ ac(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + ac(x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) \\
 & \quad + ac(x_3 - \bar{x})(y_3 - \bar{y}) + ac(x_4 - \bar{x})(y_4 - \bar{y}) \} \\
 &= ac \cdot \frac{1}{4} \{ (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) \\
 & \quad + (x_3 - \bar{x})(y_3 - \bar{y}) + (x_4 - \bar{x})(y_4 - \bar{y}) \} \\
 &= ac \cdot s_{xy}
 \end{aligned}$$

よって, ax と cy の相関係数 r' は $r' = \frac{ac s_{xy}}{as_x \cdot cs_y} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = r$

以上により, $r = r'$ が示された。 

